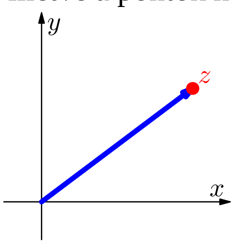
5. Komplex számok

5.1. Bevezetés

Tanulmányaink során többször volt szükség az addig használt számfogalom kiterjesztésére. Először csak természetes számokat ismertük, később használni kezdtük a törteket, illetve a negatív számokat. Újabb mérföldkövet jelentett az irracionális szám fogalma, illetve ehhez kapcsolódóan a valós szám fogalmának fokozatos kialakulása. Ezek a számkörbővítések mindig azt is jelentették, hogy egy olyan művelet, amely addig csak speciális estben volt elvégezhető, a bővítés után általánosan elvégezhetővé vált. Pl. a kivonás a természetes számok között csak akkor végezhető el, ha a kisebbítendő nagyobb vagy egyenlő mint a kivonandó, a negatív számok bevezetésével azonban a kivonás minden esetben elvégezhetővé válik. Hasonló a helyzet az osztással, és a törtek bevezetésével.[1]
A valós számok körében a gyökvonás művelete korlátozott, hiszen csak nemnegatív számokból tudunk négyzetgyököt vonni. A komplex számok bevezetése után a negatív számokból is lehetővé válik a négyzetgyökvonás.

Jelölés: A komplex számok jelölésére gyakran használjuk a z-t, illetve annak indexes változatait (z_1, z_2, stb.).

A komplex számok at a sík pontjaival, illetve a pontok helyvektoraival tudjuk szemléltetni.



A komplex számok ábrázolására használt síkot szokás *komplex számsíknak*, illetve *Gauss-féle számsíknak* nevezni.

Mivel a sík pontjait (és azok helyvektorait) egy valós számokból álló számpárral tudjuk leírni, a komplex számok is leírhatók egy ilyen számpárral: $z = (a, b)$. Az első számot a komplex szám valós (reális) részének nevezzük, a második számot a komplex szám képzetes (imaginárius) részének.[2]

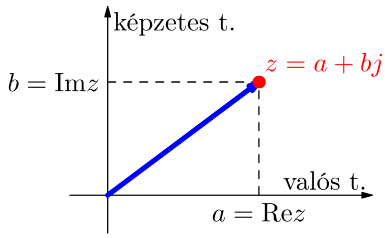
Jelölés: $a = \mathrm{Re}z$, $b = \mathrm{Im}z$.

Ennek megfelelően a Gauss-féle számsík tengelyeinek jelölésére nem (a fent használt) x-et és y-t szokás használni. Az első tengelyt *valós tengelynek*, a másodikat *képzetes tengelynek* nevezzük.

A komplex számokal való műveletek elvégzésének megkönnyítésére a $z = (a, b)$ komplex szá-

[1] Bár a 0-val továbbra sem lehet osztani.
[2] Tehát a komplex szám képzetes része is *valós szám*.

mot szokás $z = a + bj$ alakba írni.[3] Ezt a komplex szám *algebrai*, illetve *kanonikus alakjának* nevezzük. A képletben szereplő j neve képzetes egység. Ennek négyzete $j^2 = -1$.



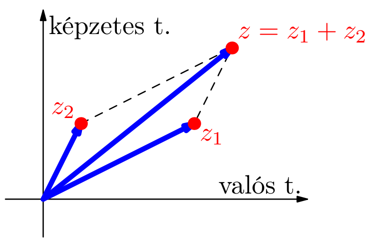
5.2. Műveletek algebrai alakban megadott komplex számokkal

Definíció

A $z_1 = a_1 + b_1 j$ és $z_2 = a_2 + b_2 j$ komplex számok összegén az $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) j$ komplex számot, különbségén az $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) j$ értjük.

Megjegyzések:

- Tehát az összeget úgy kapjuk, hogy a valós részt a valós résszel, a képzetes részt a képzetes résszel adjuk öszze. Hasonló a szabály a kivonás esetén is.
- A vektorral való ábrázolás itt különösen szerencsés, mert a két művelet a megfelelő vektorműveletnek felel meg.
- A kivonás a komplex számok közében is az összeadás inverz művelete, hiszen a $z = z_1 - z_2$ különbség a $z_2 + z = z_1$ egyenlet megoldása.



Példák:

- $(2 + 3j) + (5 + 6j) = 7 + 9j$
- $(-2 + j) + (3 + 4j) = 1 + 5j$
- $(-2 - 3j) + (5 - 4j) = 3 - 7j$

[3] Ehelyett a matematika könyvek általában a $z = a + bi$ alakot használják. Mi a villamosságtan, illetve fizika tantárgyakkal való egységesség miatt használjuk a fenti jelölést.

- $(9 + 11j) - (3 + 6j) = 6 + 5j$
- $(-1 + 4j) - (3 - 2j) = -4 + 6j$
- $(1 - 3j) - (-3 - 2j) = 4 - j$

Definíció

A $z_1 = a_1 + b_1 j$ és $z_2 = a_2 + b_2 j$ komplex számok szorzatán az $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, j$ komplex számot értjük.

Megjegyzés: A szorzás eredménye a szokásos disztributív szabály[4] alkalmazásával adódik, ha felhasználjuk még, hogy $j^2 = -1$.

Példák:

- $(2 + 3j) \cdot (5 + 6j) = 10 + 12j + 15j + 18j^2 = 10 + 12j + 15j - 18 = -8 + 27j$
- $(3 - 2j) \cdot (4 + 3j) = 12 + 9j - 8j - 6j^2 = 12 + 9j - 8j + 6 = 18 + j$
- $(-2 - j) \cdot (1 - 5j) = -2 + 10j - j + 5j^2 = -2 + 10j - j - 5 = -7 + 9j$

Definíció

Ha $z_1 z = z_2$ és $z_1 \neq 0$, akkor z a z_2 és z_1 komplex számok hányadosa: $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Megjegyzés: Az osztást tehát a szokásos módon a szorzás inverz műveleteként definiáljuk.

Hogyan osztjuk el az egyik komplex számot a másikkal, ha algebrai alakban vannak megadva?

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_2 + b_2 j}{a_1 + b_1 j} = \frac{(a_2 + b_2 j)(a_1 - b_1 j)}{(a_1 + b_1 j)(a_1 - b_1 j)} = \frac{a_2 a_1 - a_2 b_1 j + a_1 b_2 j - b_2 b_1 j^2}{a_1^2 - b_1^2 j^2} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, j}{a^2 + b^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a^2 + b^2}\, j$$

Példák:

- $\dfrac{2 + 3j}{3 + 5j} = \dfrac{(2 + 3j)(3 - 5j)}{(3 + 5j)(3 - 5j)} = \dfrac{6 - 10j + 9j + 15}{9 + 25} = \dfrac{21 - j}{34} = \dfrac{21}{34} - \dfrac{1}{34} j$
- $\dfrac{4 - j}{-1 - 2j} = \dfrac{(4 - j)(-1 + 2j)}{(-1 - 2j)(-1 + 2j)} = \dfrac{-4 + 8j + j + 2}{1 + 4} = \dfrac{-2 + 9j}{5} = -\dfrac{2}{5} + \dfrac{9}{5} j$

[4] Tagonként való szorzás.

A $\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_2 + b_2 j}{a_1 + b_1 j}$ osztást tehát úgy tudjuk elvégezni, hogy bővítjük a törtet az $a_1 - b_1 j$ kifejezéssel, amit úgy kaptunk, hogy a tört nevezőjében levő összeadást kivonásra változtattuk.

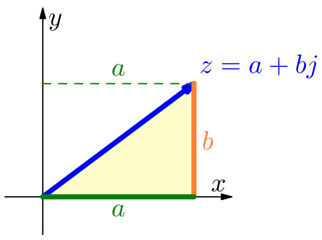
Definíció

Az $a - bj$ komplex számot a $z = a + bj$ komplex szám konjugáltjának nevezzük.

Jelölés: $\bar{z}$

A nevező konjugáltjával való bővítés azért segít az osztás elvégzésében, mert a komplex számot a konjugáltjával megszorozva mindig valós számot kapunk:

$$z\bar{z} = (a + bj)(a - bj) = a^2 + b^2$$



Megjegyzés: Az ábráról leolvasható, hogy $z\bar{z} = a^2 + b^2$ a derékszögű háromszög átfogójának, azaz a komplex számot ábrázoló vektor hosszának négyzete.

Definíció

A z komplex számot ábrázoló vektor hosszát a komplex szám abszolút értékének nevezzük.

Jelölés: $|z|$.

A fentiekből adódik a következő összefüggés:

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Tétel:

Bármely z_1 és z_2 komplex számok esetén igazak a következő összefüggések:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$
$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

A pozitív egész kitevőjű hatvány értelmezése a komplex számok körében analóg a valós számok körében tanultakkal:

Definíció

Ha n pozitív egész, akkor z komplex szám n-edik hatványán a $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-\text{szer}}$ komplex számot értjük.

Tétel:

Bármely z komplex és n pozitív egész szám esetén:

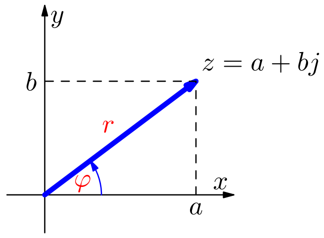
$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Feladat: Határozzuk meg a j^{2006} hatvány értékét!

Megoldás: $j^1 = j$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j, \ldots$
Észrevehetjük, hogy a j szám hatványai periodikusan ismétlődnek. Egy periódus 4 egymást követő hatványból áll. 2006-ot 4-gyel osztva a hányados 501, a maradék 2. Így $j^{2005} = j^1 = j$ és $j^{2006} = j^2 = -1$.

5.3. A komplex szám trigonometrikus és exponenciális alakja

A komplex számot a Gauss-féle számsíkon ábrázoló pont helyzete megadható annak úgy nevezett polárkoordinátáival is, azaz a pont origótól mért r távolságával és azzal a φ söggel, amit a pontba mutató helyvektor az x tengely pozitív irányával bezár.



Mivel $a = r\cos\varphi$ és $b = r\sin\varphi$ a z komplex szám

$$z = a + bj = r\cos\varphi + jr\sin\varphi = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

alakba írható.

Definíció
A komplex szám $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ alakját trigonometrikus alaknak nevezzük.

Megjegyzések:

- A trigonometrikus alakban szereplő r szorzótényező a komplex szám abszolút értéke, azaz $r = |z|$.
- A komplex szám trigonometrikus alakjában szereplő φ szög (irányszög, argumentum) nem egyértelmű, hiszen az egymástól a teljesszög (360°) egészszámú többszörösében eltérő szögek ugyanazt az irányt határozzák meg.

A $z = a + bj = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ komplex számot szokás $z = re^{j\varphi}$ alakban is felírni.

Definíció
A komplex szám $z = re^{j\varphi}$ alakját exponenciális alaknak nevezzük.

Megjegyzés:

Az exponenciális alakban a φ szögnek csak az ívmértékben (radiánban) megadott értéke használható.

5.3.1. Trigonometrikus alakban megadott komplex szám átírása algebrai alakba, illetve algebrai alakban megadott komplex szám átírása trigonometrikus alakba

A *trigonometrikus alakban megadott komplex szám algebrai alakjának meghatározása* a szögfüggvények értékének behelyettesítésével és egyszerűbb alakra hozással adódik.

Példa: Ha $z = 4\,(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ)$, akkor $z = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\cdot\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2j \approx 3,464 + 2j$

Algebrai alakban megadott komplex szám trigonometrikus alakjának meghatározása:

- Meghatározzuk a komplex szám abszolút értékét: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Meghatározzuk a komplex szám egy irányszögét. Itt a $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ összefüggés mellett figyelembe kel venni, hogy a komplex szám melyik síknegyedben helyezkedik el.
- r és φ felhasználásával felírjuk a trigonometrikus alakot.

Példák:

- Ha $z = -3 + 5j$, akkor
  $r = |z| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,831$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{5}{3} \Rightarrow \varphi \approx -59,04^\circ + k\cdot 180^\circ$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.[5]
  Ha a komplex számot ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon, akkor látjuk, hogy képe a második negyedben található, ezért irányszögnek választhatjuk pl. a $\varphi \approx -59,04^\circ + 180^\circ = 120,96^\circ$ szöget.
  A keresett trigonometrikus alak: $z \approx 5,831\,(\cos 120,96^\circ + j\sin 120,96^\circ)$.
  A komplex szám exponenciális alakja: $z \approx 5,831e^{2,11j}$
- Ha $z = -4 - 6j$, akkor $r = |z| = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} \approx 7,21$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2} = 1,5 \Rightarrow \varphi \approx 56,31^\circ + k\cdot 180^\circ$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. A komplex szám képe a harmadik negyedben helyezkedik el, ezért $\varphi \approx 236,31^\circ$. Tehát $z \approx 7,21\,(\cos 236,31^\circ + j\sin 236,31^\circ)$.
  A komplex szám exponenciális alakja: $z \approx 7,21e^{4,12j}$

[5] A tg függvény periódusa 180°.

5.3.2. Műveletek trigonometrikus és exponenciális alakban

Tétel:
Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$, akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

és $z_2 \neq 0$ esetén

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Megjegyzések:

- Tehát a komplex számok szorzásánál az abszolút értékek összeszorzódnak, az irányszögek összeadódnak.
- A komplex számok hányadosának abszolút értéke az eredeti komplex számok abszolút értékeik hányadosa, irányszöge az eredeti komplex számok irányszögének különbsége.
- Az összeadás és a kivonás elvégzésére a trigonometrikus alak nem alkalmas, tehát ha ilyen műveletet akarunk végezni, akkor a komplex számokat először átírjuk algebrai alakba.

Tétel:
Ha $z_1 = r_1 e^{\varphi_1 j}$ és $z_2 = r_2 e^{\varphi_2 j}$, akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2) j}$$

illetve $z_2 \neq 0$ esetén

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2) j}$$

Megjegyzések:

- Ez a tétel az előző tétel exponenciális alakkal történő megfogalmazása.

- A tétel összhangban van az azonos alapú hatványok szorzásáról, illetve osztásáról szóló hatványozás azonosságokkal.

Példák:

- Ha $z_1 = 3(\cos 120^\circ + j\sin 120^\circ)$ és $z_2 = 4(\cos 35^\circ + j\sin 35^\circ)$, akkor

$$z_1 z_2 = 12(\cos 155^\circ + j\sin 155^\circ) = 12e^{\frac{31\pi}{36}j}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}(\cos 85^\circ + j\sin 85^\circ) = \frac{3}{4}e^{\frac{17\pi}{36}j}$$

- Ha $z_1 = 6(\cos 261^\circ + j\sin 261^\circ)$ és $z_2 = 11(\cos 312^\circ + j\sin 312^\circ)$, akkor

$$z_1 z_2 = 66(\cos 573^\circ + j\sin 573^\circ) = 66(\cos 213^\circ + j\sin 213^\circ) = 66e^{\frac{71\pi}{60}j}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{11}(\cos(-51^\circ) + j\sin(-51^\circ)) = \frac{6}{11}(\cos 309^\circ + j\sin 309^\circ) = \frac{6}{11}e^{\frac{103\pi}{36}j}$$

Tétel:
Moivre-formula: Ha $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ és $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

Példa: Legyen $z = 2(\cos 41^\circ + j\sin 41^\circ)$. Határozzuk meg z^{10} trigonometrikus és exponenciális alakját.
Megoldás: $z^{10} = 2^{10}(\cos 410^\circ + j\sin 410^\circ) = 1024(\cos 50^\circ + j\sin 50^\circ) = 1024e^{\frac{5\pi}{18}j}$

Definíció
Legyen n pozitív egész szám. A z komplex szám n-edik gyökén az olyan u komplex számot értjük, amelyre $u^n = z$.

Tétel:
A z komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van. Ha z trigonometrikus alakja $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, akkor n-edik gyökei az

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n} + j\sin\frac{\varphi + k\cdot 360^\circ}{n}\right)$$

komplex számok, ahol $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Megjegyzések:

- A valós számok halmazán a gyökvonás egyértelmű művelet volt, tehát egy valós számnak mindig pontosan egy darab n-edik gyöke volt. Ettől eltérően a komplex számok körében a gyökvonás többértékű művelet.
- A z komplex szám n-edik gyökének kiszámításánál felhasználjuk az r abszolút érték n-edik gyökét. Azonban a képletben szereplő $\sqrt[n]{r}$ az r szám valós számok halmazán vett (egyetlen) n-edik gyökét jelenti.
- Az n-edik gyök felírásában szereplő k szám valójában bármilyen egész szám lehetne, a z komplex számnak azonban mégsincs több n-edik gyöke, mint amit már felírtunk. Ha a k_1 és k_2 egész számok különbsége az n szám egészszámú többszöröse, akkor

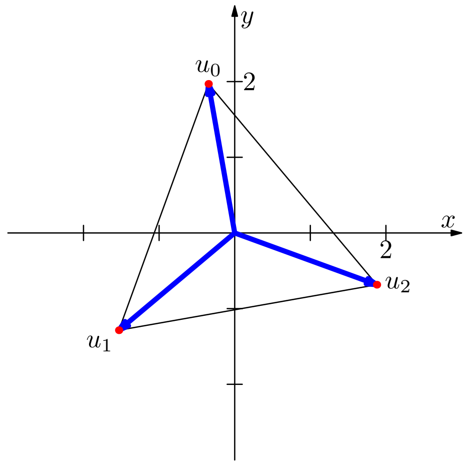
$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k_1\cdot 360^\circ}{n} + j\sin\frac{\varphi + k_1\cdot 360^\circ}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k_2\cdot 360^\circ}{n} + j\sin\frac{\varphi + k_2\cdot 360^\circ}{n}\right)$$

  Pl.: $u_0 = u_n$, $u_1 = u_{n+1}$ stb.
- Ha a z komplex szám n-edik gyökeit ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon, akkor ($n \geq 3$ esetén) a megfelelő pontok egy szabályos n-szög csúcsai.

Példa: Határozzuk meg a $z = 8(\cos 300^\circ + j\sin 300^\circ)$ komplex szám köbgyökeit és ábrázoljuk őket a Gauss-féle számsíkon!
Megoldás: Jelöljük a megoldásokat u_0, u_1, u_2-vel.

$$u_k = 2\left(\cos\frac{300^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + j\sin\frac{300^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right) =$$
$$= 2\left(\cos(100^\circ + k\cdot 120^\circ) + j\sin(100^\circ + k\cdot 120^\circ)\right),$$

ahol $k \in \{0, 1, 2\}$, azaz $u_0 = 2(\cos 100^\circ + j\sin 100^\circ)$, $u_1 = 2(\cos 220^\circ + j\sin 220^\circ)$, $u_2 = 2(\cos 340^\circ + j\sin 340^\circ)$.


y
u_0
2
x
2
u_2
u_1